Groupe C

MATHÉMATIQUES

Notations :

On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'une base orthonormée directe $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$, et la longueur du vecteur $\vec{x}$ est désignée par $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Les parties I *et* II *sont indépendantes.*

I

On décide d'adopter les règles suivantes pour la construction d'un musée :

Sa base est un triangle équilatéral T dont les sommets sont désignés par A, B, C et dont la longueur du côté est notée a. Son toit est une surface obtenue en portant sur la verticale de tout point M du triangle T une hauteur égale à :

$f_n(\overrightarrow{OM}) = |\overrightarrow{MA}|^n + |\overrightarrow{MB}|^n + |\overrightarrow{MC}|^n$ où n est un entier strictement positif.

A la fonction f_n, on associe une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, g_n, définie par $g_n(x, y) = f_n(x\vec{i} + y\vec{j})$.

On note $\hat{T}$ l'ensemble des coordonnées des points de T, soit : $\hat{T} = \{(x, y)$; le point M de coordonnées (x, y) dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartient à T $\}$.

1° *a.* Montrer que la fonction g_n est continue et admet des dérivées partielles continues $\frac{\partial g_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial g_n}{\partial y}$ si $n > 1$. En est-il de même si $n = 1$?

b. On pose $\overrightarrow{\text{grad}}\, g_n(x, y) = \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, y)\,\vec{i} + \frac{\partial g_n}{\partial y}(x, y)\,\vec{j}$.

Montrer que si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g_n(x, y) = n\left[\,|MA|^{n-1}\frac{\overrightarrow{MA}}{|MA|} + |MB|^{n-1}\frac{\overrightarrow{MB}}{|MB|} + |MC|^{n-1}\frac{\overrightarrow{MC}}{|MC|}\right]$$

c. Montrer qu'il existe un point G de coordonnées (x_0, y_0) appartenant à $\hat{T}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, g_n(x_0, y_0) = 0$.

2° On suppose dans cette question que dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B, C ont pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

Montrer que l'aire du mur de base AB est égale à :

$$I_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} g_n(x, 0)\,dx.$$

Calculer I_{2p} si p est un entier $\geqslant 1$.

Établir une relation de récurrence entre : I_{2p+1} et I_{2p+3} si p est un entier positif nul.

Calculer I_1, et en déduire I_{2p+1}.

Tournez la page S. V. P.

ENS ULM SEVRES 84

3° On pose $f_n^{\wedge}(\overrightarrow{OM}) = |\overrightarrow{MA}|^n$ et $g_n^{\wedge}(x, y) = f_n^{\wedge}(x\vec{i} + y\vec{j})$.

a. Montrer que le volume V_n du musée est égal à :

$$V_n = \iint_{\hat{T}} g_n(x, y)\, dx\, dy$$

et justifier rapidement l'égalité

$$V_n = 3 \iint_{\hat{T}} g_n^{\wedge}(x, y)\, dx\, dy .$$

b. On suppose que dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées des points A, B, C sont $(0, 0)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)$.

Montrer que :

$$V_n = 3 \frac{1}{n+2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^{n+2}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} d\theta .$$

En déduire V_n pour $n \geqslant 1$.

II

On s'intéresse maintenant au degré de satisfaction que procure ce mode de construction auprès des visiteurs du musée.

On estime à p la probabilité pour qu'un visiteur du musée trouve le bâtiment beau, où p est un nombre réel appartenant à $]0, 1[$.

On admet que les visiteurs ont des comportements identiques et indépendants.

Compte tenu de ces considérations, on peut modéliser le comportement des visiteurs par la donnée d'une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, de variables aléatoires, définies sur un espace (Ω, Q, P) à valeurs dans $\{0, 1\}$ et indépendantes et de même loi, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$, on suppose que les variables $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont indépendantes et de loi de Bernouilli définie par $P(X_i = 1) = p$, puisque l'événement $\{X_i = 1\}$ traduit le fait que le $i^{ième}$ visiteur a trouvé le bâtiment beau.

1° On désigne par S_n la somme $X_1 + X_2 + \ldots X_n$ $(n \geqslant 1)$ qui représente le nombre de visiteurs satisfaits parmi n visiteurs.

Tournez la page S. V. P.

a. Quelle est la loi de S_n?

b. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge vers p en un sens que l'on précisera.

2° Si t est un entier $\geqslant 1$, on désigne par N_t le nombre de visiteurs nécessaires pour que t visiteurs exactement soient satisfaits, c'est-à-dire que N_t désigne le nombre (éventuellement infini) de variables S_n majorées par t.

a. Montrer que l'événement $\{N_t = k\}$ est identique à l'événement $\{S_k = t < S_{k+1}\}$ où k est un entier $\geqslant 1$. Calculer $P(N_t = k)$.

b. On désigne par $G_t(s)$ la fonction génératrice de N_t, soit

$$G_t(s) = \sum_{k \geqslant 1} s^k P(N_t = k)$$

si s est un nombre réel de module $\leqslant 1$. Montrer que

$$G_t(s) = p^{t+1} s^t (1 - qs)^{-(t+1)} \quad \text{où } q = 1 - p .$$

c. Calculer $G_t(1)$ et montrer que la fonction $G_t(s)$ est deux fois dérivable au point $s = 1$, et justifier les égalités :

$$G'_t(1) = E(N_t) \qquad \text{et} \qquad G''_t(1) = E[N_t(N_t - 1)] .$$

d. Montrer que $P(N_t < +\infty) = 1$.

Étudier les limites quand t tend vers $+\infty$, $E[N_t]/t$ et $E[N_t^2]/t^2$.

3° On pose $\Phi_t(y) = G_t(\exp - y) \times \exp[y(t + q)/p]$ où $q = 1 - p$ et où y est un nombre réel positif.

a. Faire un développement limité de $\operatorname{Log} \Phi_t(y)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b. En déduire que :

$$E\left[\exp - y \times \frac{N_t - E(N_t)}{\sqrt{\operatorname{var} N_t}}\right]$$

converge si t tend vers $+\infty$ vers la fonction $g(y) = \exp \frac{1}{2} y^2$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail